Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

16 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$. On suppose que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$ avec $0 < l < 1$. Montrez que la fonction f admet un point fixe.

Solution : *Considérons un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $l < k < 1$. Comme $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geqslant A$, $\dfrac{f(x)}{x} \leqslant k$. Donc pour $x \geqslant A$, $f(x) \leqslant kx$. Considérons la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(0) = f(0) \geqslant 0$, et puisque $\varphi(x) \leqslant (k-1)x$ pour $x \geqslant A$, et que $(k-1) < 0$, $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty$. Donc il existe $B > A$ tel que $\varphi(B) < 0$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et B, on montre l'existence d'un zéro de la fonction φ et donc d'un point fixe de la fonction f.*

Références