

Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

², ,

³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$. On suppose que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$ avec $0 < l < 1$. Montrez que la fonction f admet un point fixe.

Solution : Considérons un réel $k \in \mathbb{R}$ tel que $l < k < 1$. Comme $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A, \frac{f(x)}{x} \leq k$. Donc pour $x \geq A, f(x) \leq kx$. Considérons la fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x$. On a $\varphi(0) = f(0) \geq 0$, et puisque $\varphi(x) \leq (k-1)x$ pour $x \geq A$, et que $(k-1) < 0, \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$. Donc il existe $B > A$ tel que $\varphi(B) < 0$. En utilisant le théorème des valeurs intermédiaires entre 0 et B , on montre l'existence d'un zéro de la fonction φ et donc d'un point fixe de la fonction f .

Références