Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Indication 0.0 : *Résoudre d'abord l'exercice pour $n = 2$ en faisant un dessin. Passer ensuite au cas général.*

Solution : *Notons*

$$t = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

Montrons qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $t \leqslant f(x_i)$. Par l'absurde, si $\forall k \in [1, n], f(x_k) < t$, en additionnant ces inégalités, on aurait

$$nt = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) < nt$$

ce qui est absurde. On montre de même qu'il existe $j \in [1, n]$ tel que $t \geqslant f(x_j)$.

Par conséquent, $t \in [f(x_j), f(x_i)]$ et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme f est continue sur $\mathbb{R}$, il existe $c \in [x_j, x_i]$ tel que $t = f(c)$.

Références