Pas de titre

Alain Soyeur¹, François Capaces², and Emmanuel Vieillard-Baron³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

²,
³

³Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

Soient deux fonctions continues $f, g : [0, 1] \mapsto [0, 1]$. On suppose que $f \circ g = g \circ f$. On note K l'ensemble des points fixes de f .

1. Montrer que K est stable par g .
2. Montrer que K possède un plus petit élément x_0 .
3. On suppose que $\forall x \in K, g(x) \geq x$. Montrer que la suite définie par x_0 et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$ converge vers un point fixe commun à f et g .

Solution :

1. Soit $x \in K$. Montrons que $g(x) \in K$. Calculons pour cela $f(g(x)) = g(f(x)) = g(x)$.
2. K est non vide, voir l'exercice ?? et minoré par 0 donc K possède une borne inférieure x_0 . Montrons que $x_0 \in K$. En appliquant la propriété de caractérisation de la borne inférieure, on construit une suite (x_n) de points de K qui converge vers x_0 . Comme $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n$, et que f est continue au point x_0 , il vient en passant à la limite que $f(x_0) = x_0$, donc $x_0 \in K$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $x_{n+1} = g(x_n) \geq x_n$ et donc la suite (x_n) est croissante majorée par 1. Elle converge d'après le théorème de la limite monotone vers $\ell \in [0, 1]$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n$ (démonstration facile par récurrence), et que f est continue au point ℓ , on trouve que $f(\ell) = \ell$. Comme également $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = g(x_n)$, on a aussi $g(\ell) = \ell$ et donc ℓ est un point fixe commun à f et g .

Remarque : On pourrait se poser la question de savoir si dans le cas général il existe toujours un point fixe commun à f et g . Cette conjecture a été émise en 1954. La réponse (négative) a été apportée en 1969. Le lecteur curieux pourra se reporter à la (longue) discussion : <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?4,546479>

Références