Pas de titre

Alain Soyeur[1], François Capaces[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2], ,
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ une fonction continue.

1. *Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $f(a_n) = a_n^n$;*
2. *On suppose maintenant que f est décroissante strictement. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le réel $a_n \in [0,1]$ trouvé dans la question précédente est unique à vérifier $f(a_n) = a_n^n$ et étudier la suite (a_n).*

Solution :

1. *Soit $n > 0$. Posons $g_n : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - x^n \end{array} \right.$. Alors la fonction g_n est continue sur $[0,1]$ et $g_n(0) = f(0) \geqslant 0$, $g_n(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $a_n \in [0,1]$ tel que $g_n(a_n) = 0$ et donc $f(a_n) = a_n^n$.*
2. *Si f est continue et strictement décroissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, g_n est continue et strictement décroissante également. Par conséquent, g_n réalise une bijection de $[0,1]$ vers $[f(1) - 1, f(0)]$. Comme $0 \in [f(1) - 1, f(0)]$, 0 possède un unique antécédent a_n par g_n. Calculons $g_{n+1}(a_n) = f(a_n) - a_n^{n+1} = a_n^n - a_n^{n+1} = a_n^n(1 - a_n) \geqslant 0$ (car $g_n(a_n) = 0 \Rightarrow f(a_n) = a_n^n$). Comme g_{n+1} est décroissante, $a_n \leqslant a_{n+1}$ (par l'absurde, si $a_{n+1} < a_n$, on aurait $0 = g_{n+1}(a_{n+1}) > g_{n+1}(a_n) \geqslant 0$). (Un petit coup d'œil sur le tableau de variations "évite" un raisonnement par l'absurde).*

   La suite (a_n) est croissante et majorée par 1, elle converge donc d'après le théorème de la limite monotone vers un réel $l \in [0,1]$.

Références