Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et croissante. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant a\,|x - y|$$

Montrer que la fonction f est bijective.

Solution :

1. *Montrons que f est injective : soient deux réels $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors*

$$|x - y| \leqslant \frac{1}{a}\,|f(x) - f(y)| \leqslant 0$$

et donc $x = y$.

2. *Montrons que la fonction f n'est pas majorée. Par l'absurde : si f était majorée alors d'après le théorème de la limite monotone, elle tendrait vers une limite finie l lorsque $x \to +\infty$. Mais alors, il existerait $c > 0$ tel que $\forall x \geqslant c$, $l - 1 \leqslant f(x) \leqslant l$. On aurait alors ,*

$$\forall x \geqslant c, \quad |f(x) - f(c)| \geqslant a|x - c| \Rightarrow |x - c| \leqslant \frac{1}{a}|f(x) - f(c)| \leqslant \frac{1}{a}$$

ce qui est impossible car pour x assez grand, $|x - c| > \frac{1}{a}$. On montre de même que f n'est pas minorée.

3. *Par conséquent, la fonction f est surjective. En effet, Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) \leqslant t \leqslant f(b)$. Mais alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a, b]$ tel que $f(c) = t$.*

Références