Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *continue sur le segment* $[0,1]$*. Soient deux réels* $p, q > 0$*. Montrer qu'il existe* $x_0 \in [0,1]$ *tel que*

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0).$$

Solution : *Introduisons la fonction définie par* $\varphi(x) = (p+q)f(x) - pf(0) - qf(1)$*.*

Cette fonction φ *est continue sur le segment* $[0,1]$ *et*

$$\varphi(0) = q(f(0) - f(1)), \quad \varphi(1) = p(f(1) - f(0))$$

Comme $p, q > 0$*,* $\varphi(0)$ *et* $\varphi(1)$ *sont de signes opposés. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe* $x_0 \in [0,1]$ *tel que* $\varphi(x_0) = 0$*, ce qui prouve le résultat.*

Références