Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et décroissante. Montrer que f admet un unique point fixe.

Solution : *Introduisons la fonction g donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - x$. g est strictement décroissante et donc injective et ne s'annule donc qu'une fois au plus. Supposons que g ne s'annule pas. Alors g est ou strictement positive ou strictement négative.*

1. *Si $g > 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > x$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car $\lim_{+\infty} f = \inf_{\mathbb{R}} f$.*
2. *Si $g < 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < x$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$ ce qui est absurde car $\lim_{-\infty} f = \sup_{\mathbb{R}} f$.*

On aboutit dans les deux cas à une contradiction et nécessairement g s'annule une et une seule fois sur $\mathbb{R}$. On en déduit que f admet un et un seul point fixe.

Références