# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

***Exercice 0.1*** ★★★ ***Pas de titre***

*Soit* $f : [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue en* $0$ *telle que* $f(0) = 0$ *et* $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$. *Montrer que* $\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

*Indication 0.0 :* *Une des hypothèses fait intervenir* $f(2x)$ *et* $f(x)$. *On cherche à obtenir un résultat sur* $f(x)$ *seulement. Ecrire la définition de la limite : il existe* $\alpha > 0$ *tel que pour tout* $x \in [0, \alpha[$, ... *Remarquer que* $\dfrac{x}{2} \leqslant \alpha$ *et donc* $-\varepsilon \dfrac{x}{2} \leqslant f(x) - f(\dfrac{x}{2}) \leqslant \varepsilon \dfrac{x}{2}$. *Ecrire ce que l'on obtient avec* $\dfrac{x}{4}$... $\dfrac{x}{2^p}$. *Si on additionne ces inégalités et on fait tendre* $p$ *vers* $+\infty$, *qu'obtient-on ?*

***Solution :*** *Soit* $\varepsilon > 0$. *Puisque* $\dfrac{f(2x) - f(x)}{x} \to 0$, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que*

$$\forall x \in [0, \alpha], \quad -\varepsilon \leqslant \frac{f(2x) - f(x)}{x} \leqslant \varepsilon$$

*Soit alors* $x \in [0, \alpha]$. *Soit* $p \in \mathbb{N}$. *Puisque* $\dfrac{x}{2}, \dfrac{x}{2^2}, \dots, \dfrac{x}{2^p} \in [0, \alpha]$, *on a la série d'inégalités suivantes :*

$$\begin{array}{rcl}
-\varepsilon \dfrac{x}{2} \leqslant f(x) - f(\dfrac{x}{2}) & & \leqslant \varepsilon \dfrac{x}{2} \\
-\varepsilon \dfrac{x}{2^2} \leqslant f(\dfrac{x}{2}) - f(\dfrac{x}{2^2}) & & \leqslant \varepsilon \dfrac{x}{2^2} \\
\vdots & & \vdots \\
-\varepsilon \dfrac{x}{2^p} \leqslant f(\dfrac{x}{2^{p-1}}) - f(\dfrac{x}{2^p}) & & \leqslant \varepsilon \dfrac{x}{2^p}
\end{array}$$

*En sommant ces inégalités, on trouve que :*

$$-\varepsilon \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) \leqslant f(x) - f(\frac{x}{2^p}) \leqslant \varepsilon \frac{x}{2} \left( 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} \right)$$

*On calcule alors la somme géométrique*

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{p-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^p}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^p})$$

*On a donc montré que pour tout* $p \in \mathbb{N}$,

$$-\varepsilon x(1 - \frac{1}{2^p}) \leqslant f(x) - f(\frac{x}{2^p}) \leqslant \varepsilon x(1 - \frac{1}{2^p})$$

*Comme ces inégalités sont valables quel que soit* $p$, *on peut passer à la limite lorsque* $x$ *est fixé et* $p \to +\infty$. *Puisque* $\frac{1}{2^p} \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0$ *et que* $f$ *est continue en* $0$, $f(\frac{x}{2^p}) \xrightarrow[p\to+\infty]{} f(0) = 0$. *On obtient donc que*

$$-\varepsilon x \leqslant f(x) \leqslant \varepsilon x \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{x}\right| \leqslant \varepsilon$$

*On a bien montré que* $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$.

## Références