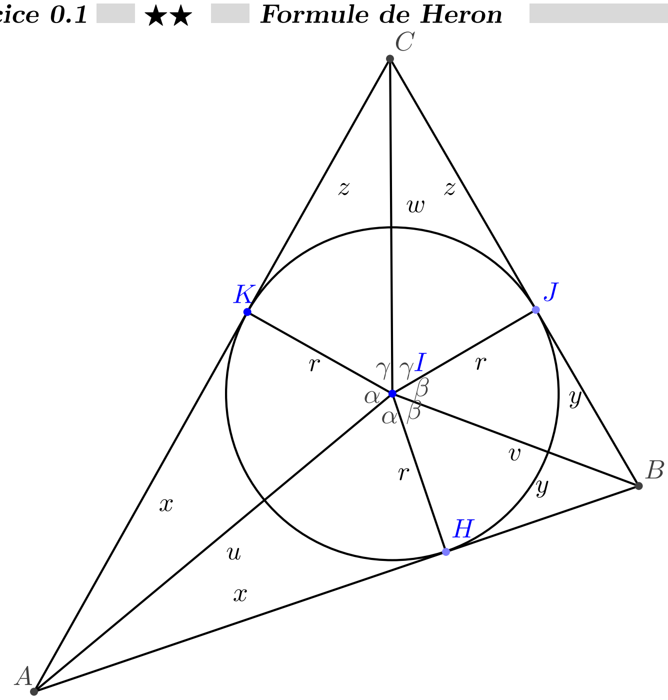
Formule de Heron

Emmanuel Vieillard-Baron[1] and Alain Soyeur[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Formule de Heron***



Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC. Les longueurs des côtés sont $a = y+z$, $b = z+x$ et $c = x+y$. On appelle s le demi-périmètre $x+y+z$. Les angles en I vérifient $\alpha+\beta+\gamma = \pi$.

1. *Démontrer que $r + ix = ue^{i\alpha}$.*
2. *Calculer $(r+ix)(r+iy)(r+iz)$.*
3. *En prenant les parties imaginaires, démontrer que $xyz = r^2(x+y+z)$.*
4. *En déduire que $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.*

5. *Démontrer que l'aire du triangle ABC vaut*
   $\mathscr{A} = \dfrac{ra}{2} + \dfrac{rb}{2} + \dfrac{rc}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ *(Formule de Heron)*

Solution :

1. *Dans le triangle AIH rectangle en H, $r = u\cos\alpha$ et $x = u\sin\alpha$, d'où $r + ix = u(\cos\alpha + i\sin\alpha) = ue^{i\alpha}$.*
2. $(r+ix)(r+iy)(r+iz) = ue^{i\alpha}ve^{i\beta}we^{i\gamma} = uvwe^{i(\alpha+\beta+\gamma)} = uvwe^{i\pi} = -uvw.$
3. *En prenant les parties imaginaires, on a $0 = r^2z + r^2y + r^2x - xyz$, d'où le résultat.*
4. *On en déduit $r^2s = xyz$. Or $s = x + (y+z) = x + a$ d'où $x = s - a$. Donc $xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$ et donc $r^2 = \dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}$, d'où le résultat.*
5. *L'aire du triangle ABC égale l'aire de BIC + celle de CIA + celle de AIB à savoir $\dfrac{ra}{2} + \dfrac{rb}{2} + \dfrac{rc}{2}$.*
   Donc $\mathscr{A} = \dfrac{ra}{2} + \dfrac{rb}{2} + \dfrac{rc}{2} = \dfrac{r}{2}(a+b+c) = rs = s\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Références