Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ *une fonction bornée et continue sur* $[0,1]$. *On considère la fonction*

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R}x \\ \longmapsto & \sup_{t\in[0,x]} f(t) & \end{array} \right.$$

1. *Montrer que* φ *est croissante.*
2. *Soit* $x_0 \in [0,1]$. *Montrer que* φ *est continue en* x_0.

Pour la deuxième question, considérer $\varepsilon > 0$ *et utiliser la continuité de* f *en* x_0. *Il existe* $\alpha > 0$ *tel que si* $|t - x_0| \leqslant \alpha$ *alors* $|f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$. *Supposer que* $x_0 \leqslant x \leqslant x + \alpha$ *et montrer que* $\sup_{t\in[0,x]} f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t) + \varepsilon$.

Solution :

1. *Soit* $0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1$. *Soit* $t \in [0,x]$. *Puisque* $t \in [0,y]$, $f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,y]} f(t)$. *Par passage à la borne supérieure, on en déduit que* $\varphi(x) = \sup_{t\in[0,x]} f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,y]} f(t) = \varphi(y)$ *(le nombre* $\varphi(y)$ *est un majorant de* $\{f(t); t \in [0,y]\}$*)*
2. *Soit alors* $x_0 \in [0,1]$. *Montrons que* φ *est continue en* x_0 *: Soit* $\varepsilon > 0$. *Comme* f *est continue en* x_0, *il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\forall t \in [0,1]$, $|t - x_0| \leqslant \alpha \Rightarrow |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
   Soit alors $x \in [0,1]$ *tel que* $|x - x_0| \leqslant \alpha$. *Supposons dans un premier temps que* $x_0 \leqslant x$. *On sait déjà que* $\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x)$. *Soit* $t \in [0,x]$, *si* $t \in [x_0,x]$, *alors* $f(t) \leqslant f(x_0) + \varepsilon \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t) + \varepsilon \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon$. *Et si* $t \in [0,x_0]$, *alors* $f(t) \leqslant \sup_{t\in[0,x_0]} f(t) \leqslant \varphi(t) \leqslant \varphi(t) + \varepsilon$. *On a donc montré que* $\forall t \in [0,x]$, $f(t) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon$. *Par passage à la borne supérieure, on en déduit que* $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon$.
   Donc, on obtient que
   $$\varphi(x_0) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
   Dans le deuxième cas, si $x \leqslant x_0$, *on sait déjà que* $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0)$. *Minorons alors* $\varphi(x)$ *: Par passage à la borne sup comme précédemment, on obtient que* $\varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) + \varepsilon$. *Donc*
   $$\varphi(x_0) - \varepsilon \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi(x_0) \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
   En conclusion φ *est continue en* x_0.

Références