

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution : Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} ,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in \mathbb{Q} : |x - a| \leq \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $\varepsilon = \frac{1}{n}$, on trouve $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - a_n| \leq \frac{1}{n}$. On construit ainsi une suite (a_n) de rationnels vérifiant : $\forall n \geq 1, |x - a_n| \leq \frac{1}{n}$. La suite (a_n) converge vers x . De la même façon, puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{R} , on construit une suite (b_n) de nombres irrationnels qui converge vers x . Mais alors si l'on suppose que f est continue au point x , $\forall n \geq 1, f(a_n) = 1$ et donc $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, mais puisque f est continue au point x , $f(a_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$, ce qui montre que $f(x) = 1$. D'autre part, $\forall n \geq 1, f(b_n) = 0$ et $f(b_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x)$ ce qui montre que $f(x) = 0$, une absurdité. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point x .

Références