Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

9 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solution : *Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{Q}\ :\quad |x - a| \leqslant \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on trouve $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. On construit ainsi une suite (a_n) de rationnels vérifiant : $\forall n \geqslant 1,\ |x - a_n| \leqslant \dfrac{1}{n}$. La suite (a_n) converge vers x. De la même façon, puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on construit une suite (b_n) de nombres irrationnels qui converge vers x. Mais alors si l'on suppose que f est continue au point x, $\forall n \geqslant 1,\ f(a_n) = 1$ et donc $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$, mais puisque f est continue au point x, $f(a_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$, ce qui montre que $f(x) = 1$. D'autre part, $\forall n \geqslant 1,\ f(b_n) = 0$ et $f(b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x)$ ce qui montre que $f(x) = 0$, une absurdité. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point x.

Références