Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$
2. $f(x) = \operatorname{argth} x \sin \frac{1}{x}$
3. $f(x) = (x-1)\ln(x-1)$
4. $f(x) = \arctan \ln(1+x) - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\operatorname{sh} x}$

Solution :

1. f *est définie sur* $\mathbb{R}^*$. f *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *comme composée de fonctions continues. Par opérations sur les limites :* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *On prolonge donc* f *par continuité en* 0 *en posant :* $f(0) = 0$.
2. f *est définie sur* $I =]-1,1[\setminus\{0\}$. f *est continue sur* I *comme produit de fonctions continues sur* I. *De plus :* $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} x\sin\frac{1}{x}$ *et utilisant le théorème des gendarmes, on montre que* $x\sin\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. *Il en est alors de même de* f *et on prolonge* f *par continuité en* 0 *en posant* $f(0) = 0$. *On vérifie facilement que* f *est divergente en* 1^- *et en* -1^+.
3. f *est définie et continue sur* $I =]1,+\infty[$. *De plus :* $f(x) \overset{X=x-1}{=\!=} X\ln X \xrightarrow[X\to 0^+]{} = 0$ *donc* f *est prolongeable par continuité en* 1^+ *en posant* $f(1) = 0$.
4. f *est définie sur* $I =]-1,+\infty[\setminus\{0\}$. *Par opérations sur les fonctions continues,* f *est continue sur* I. *Par opérations sur les limites,* $f(x) \xrightarrow[x\to -1^+]{} -\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}(-1) - 1}}{\operatorname{sh}(-1)}$ *et donc* f *est prolongeable par continuité en* -1. *De plus :* $\arctan\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{|x|}{2x}$. *Donc* $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *et* $\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch} x - 1}}{\operatorname{sh} x} \xrightarrow[x\to 0^-]{} \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. f *n'est donc*

pas prolongeable par continuité en 0 *par contre elle admet une limite à gauche et à droite de* 0.

Références