Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour chacune des fonctions suivantes :

1. *Déterminer où elle est définie.*
2. *Déterminer là où elle est continue.*
3. *La prolonger par continuité, quand c'est possible, là où elle n'est pas définie.*

1. $f(x) = \dfrac{\left(\sqrt{1-x^2}-1\right)\sin x}{\arctan x}$
2. $f(x) = \sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{1-x}$
3. $f(x) = \dfrac{x^2 \ln x}{\sin x}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)\operatorname{sh} x} - \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$

Solution :

1. *f est définie sur $I = [-1,1]\setminus\{0\}$. f est continue sur I comme produit et quotient de fonctions continues sur I. De plus, si $x \in I$: $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x\frac{x^2}{2}}{x} = -\dfrac{x^2}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.*
2. *f est définie sur $I = \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. f est continue sur I comme produit, somme et composée de fonctions continues. En appliquant le théorème des gendarmes, on montre que $\sqrt{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ et donc que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} -1$. On prolonge f par continuité à droite de 0 en posant $f(0) = 0$. Comme $|f(x)| \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$, f n'est pas prolongeable par continuité en 1.*
3. *f est définie sur $I = \mathbb{R}_+ \setminus \pi\mathbb{N}$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur I. De plus $\frac{x^2\ln x}{\sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ donc f est prolongeable par continuité à droite de 0. f est par contre divergente en tout $x \in \pi\mathbb{N}^*$.*
4. *f est définie sur $I = \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$. Par opérations sur les fonctions continues, f est continue sur I. Pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{x}{(1-x)\operatorname{sh} x}$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. On peut alors*

prolonger f par continuité en 0 en posant : $f(0) = 1$. On a aussi : $f(x) \underset{x \to 1}{\sim} \dfrac{1}{(x-1)\operatorname{sh} 1}$ qui est divergente en 1. f n'est donc pas prolongeable par continuité en 1.

Références