Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

8 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer sur quel(s) intervalle(s) les fonctions suivantes sont continues :

1. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

2. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

3. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x \ln x & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

4. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \end{array} \right.$

Solution :

1. *f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{x} = 1$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1 = f(0)$ et f est aussi continue en 0. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient et produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$. De plus : $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{\frac{x^2}{2}} = 2$ donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 2 = f(0)$ et f est aussi continue en 0. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}$.*
3. *f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions continues sur cet intervalle. De plus, $x \ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ donc f est aussi continue en 0. En conclusion, f est continue sur $\mathbb{R}_+$.*
4. *f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme composée de fonctions continues. Par opérations sur les limites : $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 = f(0)$ et $e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to 0^-]{} +\infty$ donc f n'est que continue à droite en 0.*

Références