Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 février 2024

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Soient $a, b > 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$$

Solution :

— *Si $a \neq b$. On peut supposer par exemple que $a > b$. Alors*

$$f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = a\,(1+x)^{\frac{1}{x}} = ae^{\alpha(x)}$$

où $\alpha(x) = \dfrac{1}{x}\ln\left(1 + \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{1}{x}}\right)$. Mais puisque $\dfrac{b}{a} < 1$, $\left(\dfrac{b}{a}\right)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et donc $\alpha(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}\left(\dfrac{b}{a}\right)^x = \dfrac{e^{x\ln\frac{b}{a}}}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc

$$\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a}$$

— *Si $a = b$, alors*

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}}a = ae^{\frac{1}{x}\ln 2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{a}$$

Dans tous les cas,

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\max(a,b)}$$

Références