

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soient $a, b > 0$. Déterminer la limite en $+\infty$ de

$$f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}}$$

Solution :

— Si $a \neq b$. On peut supposer par exemple que $a > b$. Alors

$$f(x) = (a^x + b^x)^{\frac{1}{x}} = a \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right)^{\frac{1}{x}} = ae^{\alpha(x)}$$

où $\alpha(x) = \frac{1}{x} \ln \left(1 + \left(\frac{b}{a}\right)^x\right)$. Mais puisque $\frac{b}{a} < 1$, $\left(\frac{b}{a}\right)^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ et donc $\alpha(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim}$

$\frac{1}{x} \left(\frac{b}{a}\right)^x = \frac{e^{x \ln \frac{b}{a}}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$. Donc

$$\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} a}$$

— Si $a = b$, alors

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x}} a = ae^{\frac{1}{x} \ln 2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{a}$$

Dans tous les cas,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{\max(a, b)}$$

Références