Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1] and Alain Soyeur[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, on considère un cercle de centre O sur lequel on place, dans le sens trigonométrique direct, 6 points distincts A, B, C, D, E et F de façon à ce que les triangles OAB, OCD et OEF soient équilatéraux. On note M, N et P les milieux respectifs de $[BC]$, $[DE]$ et $[FA]$. On veut montrer que MNP est équilatéral.

1. *Effectuer un dessin à la règle et au compas.*
2. *On note z, z' et z'' les affixes respectives de A,C et E. Donner les affixes z_B, z_D et z_F des points B, D et F en fonction de z, z' et z''.*
3. *Donner les affixes z_M, z_N et z_P des points M,N et P en fonction de z, z' et z''.*
4. *Conclure (on pourra utiliser l'exercice **??**).*

Solution :

1.
2. *Le triangle OAB est équilatéral. Par conséquent, $\boxed{z_B = e^{i\frac{\pi}{3}} z}$. De même, on montre que $\boxed{z_D = e^{i\frac{\pi}{3}} z'}$ et $\boxed{z_F = e^{i\frac{\pi}{3}} z''}$.*
3. *Comme M est le milieu de $[BC]$, $z_M = \frac{z_B+z_C}{2} = \boxed{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} z+z'}{2}}$. De même, on montre que : $z_N = \boxed{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} z'+z''}{2}}$ et que $z_P = \boxed{\dfrac{e^{i\frac{\pi}{3}} z''+z}{2}}$.*
4. *On utilise le critère prouvé dans l'exercice **??**. Pour montrer que MNP est équilatéral, il suffit de montrer que $z_M + jz_N + j^2 z_P = 0$. On a :*

$$
\begin{aligned}
a_M + jz_N + j^2 z_P = & \quad \frac{1}{2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}} z + z' + j\left(e^{i\frac{\pi}{3}} z' + z''\right) + j^2\left(\frac{e^{i\frac{\pi}{3}} z''+z}{2}\right)\right) \\
= & \quad \frac{1}{2}\left(\underbrace{\left(e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2\right)}_{\alpha} z + \underbrace{\left(1 + je^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{\beta} z'' + \underbrace{\left(j + j^2 e^{i\frac{\pi}{3}}\right)}_{\gamma} z''\right)
\end{aligned}
$$

mais

- $j^2 = -(1+j) = -e^{i\frac{\pi}{3}}$ *donc* $\alpha = 0$.
- $je^{i\frac{\pi}{3}} = j(1+j) = j + j^2 = -1$ *donc* $\beta = 0$.
- $j^2 e^{i\frac{\pi}{3}} = j^2(1+j) = j^2 + 1 = -j$ *donc* $\gamma = 0$.

ce qui prouve le résultat.

Références