Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Montrer que la fonction

$$f(x) = \frac{x^x}{\lfloor x \rfloor^{\lfloor x \rfloor}}$$

n'admet pas de limite lorsque $x \to +\infty$.

Indication 0.0 : On pourra pour cela introduire deux suites (u_n) *et* (v_n) *de terme général* $u_n = n$ *et* $v_n = n + a_n$ *avec* (a_n) *telle que :* $\forall n \geqslant 1,\ 0 < a_n < 1$ *avec* $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Solution : *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *Il vient que* $f(u_n) = 1$ *et que* $f(v_n) = e^{(n+a_n)\ln(n+a_n) - n\ln n} = e^{\alpha_n}$. *Posons* $\alpha_n = (n+a_n)\ln(n+a_n) - n\ln n$ *et développons cette expression :*

$$\alpha_n = a_n \ln n + (n+a_n)\ln(1 + \frac{a_n}{n})$$

Comme $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $\frac{a_n}{n} \to 0$ *et donc* $(n+a_n)\ln(1+\frac{a_n}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(n+a_n)a_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$. *D'autre part,* $a_n \ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ *et finalement* $\alpha_n \to +\infty$.

En conclusion, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, $f(v_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. *Par conséquent,* f *n'admet pas de limite en* $+\infty$.

Références