Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to 0^+$ de la fonction

$$f(x) = \frac{(1+x)^{x^x}}{\sin(\pi x^x)}$$

Solution : *Soit $g(x) = (1+x)^{x^x} = e^{\ln(1+x)e^{x\ln x}}$. Comme $x\ln x \to 0$, lorsque $x \to 0$, $e^{x\ln x} \to 1$ et donc $e^{x\ln x} \underset{x\to 0}{\sim} 1$. Par conséquent, $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} 1$.*

D'autre part, $h(x) = \sin(\pi x^x) = \sin(\pi(e^{x\ln x} - 1) + \pi) = -\sin(\pi(e^{x\ln x} - 1)) \underset{x\to 0}{\sim} -\pi(e^{x\ln x} - 1) \underset{x\to 0}{\sim} -\pi(x\ln x)$. Finalement, $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{\pi x\ln x}}$.

Références