Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(2x^2-1\right)}{\ln\left(x^3+1\right) - \ln\left(x^3-1\right)}$$

Solution : *Cherchons un équivalent du numérateur $n(x)$ puis du dénominateur $d(x)$ de cette expression :*

$$\begin{aligned} n(x) &= \ln(x^2+1) - \ln(2x^2-1) = \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln(2x^2) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= 2\ln x - \ln 2 - 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) = -\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x) &= \ln(x^3+1) - \ln(x^3-1) = \ln\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) = \ln\left(1+\frac{\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{\ln 2}{2}x^3}$$

Références