

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Trouver un équivalent simple lorsque $x \rightarrow +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2 - 1)}{\ln(x^3 + 1) - \ln(x^3 - 1)}$$

Solution : Cherchons un équivalent du numérateur $n(x)$ puis du dénominateur $d(x)$ de cette expression :

$$\begin{aligned} n(x) &= \ln(x^2 + 1) - \ln(2x^2 - 1) = \ln x^2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln(2x^2) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \\ &= 2 \ln x - \ln 2 - 2 \ln x + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) = -\ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x) &= \ln(x^3 + 1) - \ln(x^3 - 1) = \ln\left(\frac{x^3 + 1}{x^3 - 1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1 + \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}}\right) = \ln\left(1 + \frac{\frac{2}{x^3}}{1 - \frac{1}{x^3}}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{\ln 2}{2} x^3$$

Références