Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Trouver la limite lorsque $x \to \pi^+$ de la fonction

$$f(x) = (1+\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Solution : *Par le changement de variables $h = x - \pi$, on se ramène à trouver la limite lorsque $h \to 0^+$ de la fonction*

$$g(h) = f(\pi + h) = (1 - \cos h)^{-\frac{1}{\sin h}} = e^{-\frac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)}$$

Posons $\alpha(h) = -\dfrac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)$. D'après l'équivalent classique pour le cosinus, on a $1-\cos h \underset{h\to 0}{\sim} \dfrac{h^2}{2}$ donc on peut écrire $1-\cos h = \dfrac{h^2}{2}\theta(h)$ avec θ une fonction vérifiant : $\theta(h) \to 1$. Alors

$$\ln(1-\cos h) = \ln\left(\frac{h^2}{2}\theta(h)\right) = 2\ln h - \ln 2 + \ln\theta(h)$$

et donc

$$\ln(1-\cos h) \underset{h\to 0}{\sim} 2\ln h$$

Par suite, il vient que

$$\alpha(h) \underset{h\to 0}{\sim} -\frac{2\ln h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\infty$$

et par conséquent $g(h) \to 0$ et donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to\pi^+]{} 0}$.

Références