Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer lorsqu'elles existent les limites en le nombre indiqué des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin(x\ln x)}$ *en* $x = 0^+$.
2. $f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x$ *en* $x = +\infty$ *et pour* $a \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}}$ *en* $x = +\infty$
4. $f(x) = \dfrac{\arctan(x-1)}{x^2-1} - \dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x}$ *en* $x = 1$
5. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}}$ *en* $x = 0$
6. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{x+1}{x}} - x}{\ln(1+x^2)}$ *en* $x = +\infty$

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+\ln(1+x\ln x)}-1}{\sin(x\ln x)} \underset{x\to0^+}{\sim} \dfrac{1}{2}\dfrac{x\ln x}{\sin(x\ln x)}$ *car* $x\ln x \xrightarrow[x\to0^+]{} 0$ *et* $f(x) \underset{x\to0^+}{\sim} \frac{1}{2}$. *Donc* $f(x) \xrightarrow[x\to0^+]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
2. $f(x) = \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^{x\left(1+\frac{a}{x}\right)}$ *mais* $x\left(1+\frac{a}{x}\right) \underset{x\to+\infty}{\sim} a$ *donc par opérations sur les limites :* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{e^a}$.
3. $f(x) = \left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)^{\frac{x}{\ln x}} = e^{\dfrac{x\ln\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x}}$ *mais* $\sin\frac{\ln x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc* $\dfrac{x\ln\left(1+\sin\frac{\ln x}{x}\right)}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x\sin\frac{\ln x}{x}}{\ln x} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln x}{\ln x} = 1$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{e}$.
4. *D'une part :* $\dfrac{\arctan(x-1)}{x^2-1} = \dfrac{\arctan(x-1)}{(x-1)(x+1)} \overset{X=x-1}{=\!=} \dfrac{\arctan X}{X(X+2)} \underset{X\to0}{\sim} \dfrac{X}{2X} = \dfrac{1}{2}$.
   D'autre part : $\dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x} \overset{X=x-1}{=\!=} \dfrac{\sin\left(e^{(X)}-1\right)}{\ln(1+X)} \underset{X\to0}{\sim} \dfrac{\left(e^{(X)}-1\right)}{X} \underset{X\to0}{\sim} \dfrac{X}{X} = 1$ *donc* $\dfrac{\sin\left(e^{(x-1)}-1\right)}{\ln x} \xrightarrow[x\to1]{} 1$ *et* $f(x) \xrightarrow[x\to1]{} \boxed{-\dfrac{1}{2}}$.

5. $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{\arcsin^2 x}} = e^{\frac{\ln \operatorname{ch} x}{\arcsin^2 x}} = e^{\frac{\ln(1+(\operatorname{ch} x - 1))}{\arcsin^2 x}}$ *et* $\ln(1+(\operatorname{ch} x - 1)) \underset{x\to 0}{\sim} (\operatorname{ch} x - 1) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$ *donc* $\frac{\ln(1+(\operatorname{ch} x - 1))}{\arcsin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$. *On en déduit que* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\sqrt{e}}$.

6. $\frac{x^{\frac{x+1}{x}} - x}{\ln(1+x^2)} = x\frac{x^{\frac{1}{x}} - 1}{\ln(1+x^2)} = x\frac{e^{\frac{\ln x}{x}} - 1}{\ln(1+x^2)} \underset{x\to +\infty}{\sim} x\frac{\frac{\ln x}{x}}{\ln(1+x^2)} = \frac{\ln x}{\ln(1+x^2)} = \frac{\ln x}{\ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{2 + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln x}} \xrightarrow[x\to +\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}$.

Références