Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer lorsqu'elles existent les limites des fonctions suivantes en le nombre indiqué :

1. $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin 3x}{\ln(1+x)}$ *en* $x = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\arcsin^2 x}$ *en* $x = 0$.
3. $f(x) = \dfrac{2x + \sin 3x}{x \sin x}$ *en* $x = 0^+$.
4. $f(x) = \dfrac{2\tan x + \operatorname{sh} 5x}{\sin^3 x}$ *en* $x = 0$
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1}$ *en* $x = 1$.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+x}\right) - \dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} x}$ *en* $x = 0$

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{\tan x - \sin 3x}{\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\tan x - \sin 3x}{x}$ *et* $\dfrac{\tan x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x}{x} = 1 \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\dfrac{\sin 3x}{x} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3x}{x} = 3 \xrightarrow[x\to 0]{} 3$. *Donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{-2}$.
2. $f(x) = \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{\arcsin^2 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2x^2} = \dfrac{1}{2}$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
3. *On a :* $\dfrac{2x}{x\sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *et* $\dfrac{\sin 3x}{x \sin x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{3x}{x^2} = \dfrac{3}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} +\infty$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{+\infty}$.
4. *On a :* $\dfrac{2\tan x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{2}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ *et* $\dfrac{\operatorname{sh} 5x}{\sin^3 x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{5}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} +\infty$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{+\infty}$.
5. $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x} - 1} \overset{X = x-1}{=\!=\!=} \dfrac{\ln(1+X)}{\sqrt{1+X} - 1} \underset{X\to 0}{\sim} \dfrac{X}{\frac{X}{2}} = 2$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{2}$.
6. $\dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{sh} x} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{-x}{x} = -1$. *De plus :* $\ln\left(\sqrt{1+x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x}{2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *donc* $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$.

Références