Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \ln(\cos x)$ *en* $\frac{\pi}{2}^-$
2. $f(x) = \ln(1+\sin x)$ *en* 0
3. $f(x) = \frac{x}{1-\sin x} - x$ *en* 0.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)}$ *en* $+\infty$
5. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{2x^5 + x^2} \ln(1+\sqrt{x})$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin x}\right)$ *en* $x = 0$.

Solution :

1. $f(x) = \ln(\cos x) \overset{X=\frac{\pi}{2}-x}{=\!=\!=} \ln\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - X\right)\right) = \ln(\sin X) = \ln\frac{\sin X}{X} + \ln X = \ln(X)\left(\dfrac{\ln\frac{\sin X}{X}}{\ln(X)} + 1\right) \underset{X\to 0^+}{\sim} \ln X$. *Donc* $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}^-}{\sim} \boxed{\ln\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}$.
2. $f(x) = \ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \sin x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x}$
3. $f(x) = \dfrac{x}{1-\sin x} - x = \dfrac{x\sin x}{1-\sin x} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x^2}$. *On peut aussi remarquer que* $f(x) = x\left((1-\sin x)^{-1} - 1\right) \underset{x\to 0}{\sim} x\sin x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{x^2}$.
4. $f(x) = \sqrt{\ln(x+1) - \ln(x)} = \sqrt{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)} = \sqrt{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{x}}}$
5. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{2x^5 + x^2}\ln(1+\sqrt{x}) \underset{x\to 0^+}{\sim} -\dfrac{\sqrt{x}}{x^2(2x^3+1)} \underset{x\to 0^+}{\sim} \boxed{-x^{-\frac{3}{2}}}$ *car* $2x^3 + 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} 1$.
6. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1+\sin x}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(1+\sin x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{\sin x}{2} \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\dfrac{x}{2}}$

Références