Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{|x-2|} - \dfrac{x-1}{|x^2-4|}$ *en* 2.
2. $f(x) = x^2 \operatorname{argsh} \frac{1}{x}$ *en* $+\infty$
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5}{2x+5}}$ *en* $+\infty$.
4. $f(x) = \ln(\cos x)$ *en* $x = 0$
5. $f(x) = \ln(\sin x)$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \dfrac{(2+x)\ln(1+\sqrt{x})}{\sin^2 x}$ *en* 0^+.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{|x-2|} - \dfrac{x-1}{|x^2-4|} = \dfrac{1}{|x-2|}\left(2x - \dfrac{x-1}{|x+2|}\right) \underset{x\to 2}{\sim} \boxed{\dfrac{15}{4\,|x-2|}}$
2. $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{x^2}{x} = \boxed{x}$ *par produit d'équivalents.*
3. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^5}{2x+5}} = \dfrac{x^{\frac{5}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} \dfrac{1}{\sqrt{2+\frac{5}{x}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}}$
4. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ *car* $\ln(\cos x) = \ln(1-(1-\cos x)) \underset{x\to 0}{\sim} 1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{\frac{x^2}{2}}$.
5. $f(x) = \ln(\sin x) = \ln\dfrac{\sin x}{x} + \ln x = \ln x\left(\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} + 1\right) \underset{x\to 0^+}{\sim} \boxed{\ln x}$ *car* $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$ *et* $\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
6. $f(x) = \dfrac{(2+x)\ln(1+\sqrt{x})}{\sin^2 x} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2} = \boxed{2x^{-\frac{3}{2}}}$

Références