Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer un équivalent simple pour les fonctions suivantes au voisinage du point considéré :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}}$ *en* 0^+
2. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^3-1}}{\sqrt[3]{x^2+2}}$ *en* $+\infty$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x$ *en* $\frac{\pi}{2}$.
4. $f(x) = \cos(\sin x)$ *en* 0.
5. $f(x) = x^x - 1$ *en* 0^+.
6. $f(x) = \dfrac{\cos(\pi x)}{\sqrt{x^2-2x+1}}$ *en* 1.

Solution :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+\tan x)}{\sqrt{\sin x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{\tan x}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{x}{\sqrt{x}} = \boxed{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{3}{2}}}{x^{\frac{2}{3}}} \dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \boxed{x^{\frac{5}{6}}}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x} - \tan x = \dfrac{1-\sin x}{\cos x} \xlongequal{X = x - \frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin\left(X+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(X+\frac{\pi}{2}\right)} = \dfrac{1-\cos X}{-\sin X} \underset{X\to 0}{\sim} -\dfrac{X}{2}$. *Donc* $f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \boxed{-\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{4}}$
4. $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \boxed{1}$ *car* $\cos(\sin x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
5. $f(x) = x^x - 1 = e^{x\ln x} - 1 \underset{x\to 0^+}{\sim} \boxed{x\ln x}$ *car* $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$..
6. $\cos(\pi x) \underset{x\to 1}{\sim} -1$ *et* $x^2-2x+1 = (x-1)^2$ *donc* $f(x) \underset{x\to 1}{\sim} \boxed{-\frac{1}{|x-1|}}$

Références