Pas de titre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Déterminer les points M du plan d'affixe z tels que :

1. $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$.
2. $\dfrac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.
3. $\left|\dfrac{z+1}{z-1}\right| = 1$.

Solution : *Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Supposons que M est le point du plan complexe d'affixe z, A est celui d'affixe 1 et B est celui d'affixe -1. On a : $MA = |z-1|$, $MB = |z+1|$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) = \arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$.*

1. *Supposons que : $\dfrac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}$. Alors soit ce quotient est nul, dans quel cas $M = B$, soit $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv 0 \ [\pi]$ et donc les points A, B, M sont alignés. La réciproque est évidente. Par conséquent : $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+1}{z-1} \in \mathbb{R}\right\} = \boxed{\mathbb{R} \setminus \{1\}}$.*
2. *Supposons que : $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$. Alors : $\left(\widehat{\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi]$. Le triangle MBC est donc rectangle en A et d'après le théorème de la médiane, M est un point de cercle de diamètre $[A, B]$, c'est-à-dire un point du cercle unité différent de A. La réciproque est immédiate. Donc : $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}\right\} = \boxed{\mathbb{U} \setminus \{1\}}$.*
3. *Supposons enfin que :$\left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1$. Alors : $|z-1| = |z+1|$, ce qui s'écrit aussi : $AM = BM$. Donc M est un point de la médiatrice du segment $[A, B]$ qui est l'axe imaginaire. Par conséquent : $z \in i\mathbb{R}$. La réciproque est triviale et $\left\{z \in \mathbb{C} \mid \left|\frac{z+1}{z-1}\right| = 1\right\} = \boxed{i\mathbb{R}}$.*

Références