Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

26 mars 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\cos^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + 3}{x+\sqrt{x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}}$
3. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

Solution :

1. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+ : 2 \leqslant 2\cos^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + 3$ *donc par application du théorème des gendarmes :* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cos^2\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{x} + 3}{x+\sqrt{x}} = +\infty$
2. $(\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = e^{\dfrac{\ln \sin x}{\ln x}} = e^{\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x} - \ln x}{\ln x}} = e^{\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} - 1}$ *mais* $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc* $\dfrac{\ln\frac{\sin x}{x}}{\ln x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} (\sin x)^{\frac{1}{\ln x}} = \boxed{e^{-1}}$
3. $\dfrac{x^3+x^2-x-1}{x^3-3x-2} = \dfrac{(x+1)\left(x^2-1\right)}{(x+1)^2(x-2)} = \dfrac{x-1}{x-2} \xrightarrow[x\to -1]{} \boxed{-2}$
4. $\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}\right)\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} = \dfrac{2\sin x}{x\left(\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$ *car* $\sin x/x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$.
5. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction tangente en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \tan' 0 = 1$

6. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} = e^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}} \overset{X=\frac{1}{x}}{=\!=\!=} e^{\frac{\ln(1+X)}{X}} \xrightarrow[X\to 0]{} e$ *donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \boxed{e}$.

Références