Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **_Pas de titre_**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\frac{1}{x}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+x}{1-x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+\arctan x}{x}$

Solution :

1. $\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5} = \dfrac{\left(\sqrt{x+5}-\sqrt{x-5}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}\right)}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} = \dfrac{10}{\sqrt{x+5}+\sqrt{x-5}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$.
2. *Pour* $x>0$, $0 \leqslant \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}} \leqslant \dfrac{x}{\sqrt{|x|}} = \sqrt{|x|}$ *donc par application du théorème des gendarmes,* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}} = \boxed{0}$. *Mais* $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x-E(x)}{\sqrt{|x|}} = \boxed{+\infty}$.
3. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, $x(1/x-1) \leqslant xE\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant x.1/x$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right) = \boxed{1}$.
4. *Si* $x>0$, $\dfrac{x^2+2|x|}{x} = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2 \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{2}$. *Si* $x<0$, $\dfrac{x^2+2|x|}{x} = \frac{x^2-2x}{x} = x-2 \xrightarrow[x\to 0^-]{} \boxed{-2}$
5. $\dfrac{1+x}{1-x^2} = \dfrac{1+x}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{1}{1-x} \xrightarrow[x\to -1]{} \boxed{\dfrac{1}{2}}$

6. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{\pi}{2x} \leqslant \dfrac{x + \arctan x}{x} \leqslant 1 + \dfrac{\pi}{2x}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x + \arctan x}{x} = \boxed{1}$

Références