

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x}$

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)$

4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 1}}$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3}$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2x + 1 - E(x))$

Solution :

1. $e^{x - \sin x} \geq e^{x-1}$ donc par application du théorème des gendarmes $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x - \sin x} = \boxed{+\infty}$

2. $x^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{\ln x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{1}$ par composition et car $\ln x = o_{x \rightarrow +\infty}(x)$.

3. $x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{X = \frac{1}{x}} \frac{\ln(1+X)}{X}$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \boxed{1}$ par utilisation des limites usuelles.

4. $\frac{3x - 5}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{x} \frac{3 - \frac{5}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \boxed{3}$

5. $\frac{1}{1 - x} - \frac{3}{1 - x^3} = -\frac{2 + x}{x^2 + x + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \boxed{-1}$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x - 1 \leq E(x) < x$. Donc : $\ln x + x + 1 \leq \ln x + 2x + 1 - E(x)$ et comme $\ln x + x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ par application du théorème des gendarmes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2x + 1 - E(x)) = \boxed{+\infty}$

Solution : la limite exercice 3 est fausse.

Solution : *l'exercice 3. resultat incorrect*

Références