Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\sqrt{x}+2x}{x^2+x+1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-4\,x^2+5\,x-2}{x^2-3\,x+2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x}$

Solution :

1. $\dfrac{x\sqrt{x}+2x}{x^2+x+1} = \dfrac{x\sqrt{x}}{x^2}\dfrac{1+\frac{2}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$
2. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction* sh *en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \operatorname{ch} 0 = \boxed{1}$.
3. *On a :* $\dfrac{x^3-4\,x^2+5\,x-2}{x^2-3\,x+2} = \dfrac{(x-2)\left(x^2-2x+1\right)}{(x-2)\,(x-1)} \xrightarrow[x\to 2]{} \boxed{1}$.
4. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$: $2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \leqslant 6+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} = 6+\frac{1}{x^2}\,(x-1) \xrightarrow[x\to 0]{} -\infty$. *Donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(2\cos^2\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}+3+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right) = \boxed{-\infty}$
5. $x\left(\sqrt{x^2+3}-x\right) = x\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)}{\sqrt{x^2+3}+x} = \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+3}+x} = \dfrac{x}{x}\dfrac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\frac{3}{2}}$
6. $\dfrac{x-\sqrt{x}}{\ln x+x} = \dfrac{x}{x}\dfrac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{\ln x}{x}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$ *car* $\ln x = \underset{x\to+\infty}{o}(x)$

Références