Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\sin^2 \dfrac{1}{x}\right) \ln x$
4. $\lim\limits_{x\to 0} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\arccos x - \frac{\pi}{2}}$

Solution :

1. $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} = \dfrac{e^{(\ln x)^2}}{e^{x \ln\ln x}} = e^{\ln^2 x - x\ln\ln x} = e^{x\left(\frac{\ln^2 x}{x} - \ln\ln x\right)}$ *mais* $\dfrac{\ln^2 x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *et* $\ln\ln x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ *donc* $\dfrac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$ *par opérations sur les limites.*
2. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$
3. $\left(1+\sin^2 \frac{1}{x}\right)\ln x \leqslant \ln x$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(1+\sin^2 \dfrac{1}{x}\right) \ln x = \boxed{-\infty}$.
4. $\left|x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant |x|$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) = \boxed{0}$
5. $\dfrac{\sin(3x)}{x} \overset{X=3x}{=\!=\!=} 3\dfrac{\sin X}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 3$ *car* $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{x} = \boxed{3}$.

6. *Comme* $x \mapsto \dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x}$ *est le taux d'accroissement de* arccos *en* $x = 0$, *cette fonction étant dérivable en* 0, *on a :* $\dfrac{\arccos x - \frac{\pi}{2}}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} -1$ *donc* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arccos x - \frac{\pi}{2}} = \boxed{-1}$

Références