Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}}$
2. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x^3-4\,x^2+x+6}{x^2+3\,x+2}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^3-5x+10}{x^2+2x+2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}$

Solution :

1. *On a :* $\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}} = x^2\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{x^2e^{-x}}$ *et* $\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{x^2e^{-x}} \overset{X=x^2e^{-x}}{=\!=\!=\!=} \dfrac{\operatorname{sh}X}{X} \xrightarrow[X\to 0]{} 1$. *Donc* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\operatorname{sh}\left(x^2e^{-x}\right)}{e^{-x}} = \boxed{+\infty}$
2. *On reconnaît le taux d'accroissement de* $x\mapsto\sqrt{x}$ *en* $x=3$. *Cette fonction est dérivable en* $x=3$ *donc on obtient :* $\lim\limits_{x\to3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{6}}$
3.

$$
\begin{aligned}
& x\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\\
=\;& x\frac{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}-\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}}\\
=\;& x\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}} = x\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
=\;& x\frac{2}{\left(\sqrt{x+\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}\right)}\\
=\;& x\frac{2}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\right)\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)}\\
=\;& \frac{2}{\left(\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}+\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}}\right)\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1-\frac{1}{x}}\right)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

4. $\dfrac{x^3-4\,x^2+x+6}{x^2+3\,x+2}=\dfrac{(x+1)\left(x^2-5x+6\right)}{(x+1)\,(x+2)}\xrightarrow[x\to -1]{}\boxed{12}$

5. $\dfrac{2x^3-5x+10}{x^2+2x+2}=\dfrac{x^3}{x^2}\dfrac{2-\dfrac{5}{x}+\dfrac{10}{x^3}}{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{2}{x^2}}\xrightarrow[x\to +\infty]{}\boxed{+\infty}$

6. $\sqrt{x^2+x-1}-x\sqrt{x}=x\sqrt{x}\left(\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}-1\right)\xrightarrow[x\to +\infty]{}\boxed{-\infty}$

Références