Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}-\sqrt{x+1}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(7x\right)e^{-3x}$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1}{x}$
5. $\lim\limits_{x\to0} \left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}$
6. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}$

Solution :

1. $\dfrac{\sin\left(e^{-x}\right)}{e^{-x}} \overset{X=e^{-x}}{=\!=\!=} \dfrac{\sin X}{X} \xrightarrow[X\to0]{} \boxed{1}$
2. $\sqrt{x}-\sqrt{x+1} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$
3. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}$, $-e^{-3x}\leqslant\cos\left(7x\right)e^{-3x}\leqslant e^{-3x}$ *et* $e^{-3x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos\left(7x\right)e^{-3x}=\boxed{0}$
4. *On reconnaît le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en* 0*. Celle-ci étant dérivable en* 0*, on obtient :* $\frac{e^x-1}{x}=\frac{e^x-e^0}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{1}$.
5. $\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}=e^X$ *avec* $X=\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}\xrightarrow[x\to0]{}1$ *donc* $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=\boxed{e}$
6. $\frac{x^3-2x^2-x+2}{x^2+x-2}=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x^2-x-2\right)}{\left(x-1\right)\left(x+2\right)}\xrightarrow[x\to1]{}\boxed{-\frac{2}{3}}$.

Références