Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

30 juin 2022

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}$
2. $\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln(\ln x)$
3. $\lim_{x\to 0} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$
4. $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2e^{-x}\right)$
5. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$
6. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

Solution :

1. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}_+$, $0 \leqslant \left|\dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1}\right| \leqslant \dfrac{x}{x^2+1}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x\cos(e^x)}{x^2+1} = \boxed{0}$
2. $\ln x\ln(\ln x) = X\ln X$ *avec* $X=\ln x \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$ *donc* $\lim_{x\to 1^+} \ln x\ln(\ln x) = \boxed{0}$
3. $2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x} = 2x-1+\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 2x-1+1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^* \\ 2x-1-1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_-^* \end{cases}$ *et* $\lim_{x\to 0^+} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \boxed{0}$, $\lim_{x\to 0^-} 2x-1+\dfrac{\sqrt{x^2}}{x} = \boxed{-2}$
4. $x^2e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ *donc par composition de limites :* $\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2e^{-x}\right) = \boxed{0}$
5. $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x} = \dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} = \dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
6. *On reconnaît le taux d'accroissement de* $x\mapsto \ln(1+x)$ *en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \dfrac{\ln(1+x)-\ln 1}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \boxed{1}$.

Références