Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \ln x \ln\left(\ln x\right)$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} 2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+x^2e^{-x}\right)$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(1+x\right)}{x}$

Solution :

1. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}_+$, $0\leqslant\left|\dfrac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}\right|\leqslant\dfrac{x}{x^2+1}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x\cos\left(e^x\right)}{x^2+1}=\boxed{0}$
2. $\ln x\ln\left(\ln x\right)=X\ln X$ *avec* $X=\ln x\xrightarrow[x\to1^+]{}0$ *donc* $\displaystyle\lim_{x\to1^+}\ln x\ln\left(\ln x\right)=\boxed{0}$
3. $2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}=2x-1+\dfrac{|x|}{x}=\begin{cases}2x-1+1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_+^*\\ 2x-1-1 & \text{si } x\in\mathbb{R}_-^*\end{cases}$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to0^+}2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\boxed{0}$, $\displaystyle\lim_{x\to0^-}2x-1+\frac{\sqrt{x^2}}{x}=\boxed{-2}$
4. $x^2e^{-x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$ *donc par composition de limites :* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2e^{-x}\right)=\boxed{0}$
5. $\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}\right)\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}=\dfrac{2x}{x\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.
6. *On reconnaît le taux d'accroissement de* $x\mapsto\ln\left(1+x\right)$ *en* 0. *Cette fonction étant dérivable en* 0, *on obtient :* $\dfrac{\ln\left(1+x\right)}{x}=\dfrac{\ln\left(1+x\right)-\ln 1}{x-0}\xrightarrow[x\to0]{}\boxed{1}$.

Références