Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^4+2x^2+1}{x^2-1}$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x}$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\sqrt{x^2-2x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cos x^2}{x}$

Solution :

1. $\frac{x^4+2x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{x^4}{x^2}\dfrac{1+\frac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{1-\dfrac{1}{x^2}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{+\infty}$
2. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}^*$, $\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{\sin x-\sin 0}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} \sin' 0 = \boxed{1}$.
3. $x - \sqrt{x^2-2x} = \dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x^2-\left(x^2-2x\right)}{x+\sqrt{x^2-2x}} = \dfrac{x}{x}\dfrac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{1}$
4. $x^x = e^{x\ln x} = e^X$ *avec* $X = x\ln x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$ *donc* $x^x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \boxed{1}$.
5. $\dfrac{x^3+3x^2-3x-1}{x^2+x-2} = \frac{(x-1)\left(x^2+4x+1\right)}{(x-1)(x+2)} \xrightarrow[x\to 1]{} \boxed{2}$
6. *Pour tout* $x\in\mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{x} \leqslant \frac{\cos x^2}{x} \leqslant \frac{1}{x}$ *donc par application du théorème des gendarmes* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\cos x^2}{x} = \boxed{0}$

Références