Pas de titre

Alain Soyeur[1] and Emmanuel Vieillard-Baron[2]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Montrer que :

$$\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}.$$

On pourra prouver cette propriété par trois méthodes différentes :

1. *Une méthode algébrique utilisant les propriétés du groupe $\mathbb{U}$.*
2. *Une méthode utilisant la factorisation par l'angle moitié.*
3. *Une méthode géométrique.*

Solution :

— *Comme $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, on a : $z^{-1} = \bar{z}$ et*

$$\frac{z+1}{z-1} = \frac{(z+1)\overline{(z-1)}}{|z-1|^2} = \frac{\bar{z}-z}{|z-1|^2} = -2i\frac{\operatorname{Im}(z)}{|z-1|^2} \in i\mathbb{R}.$$

— *Comme $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que : $z = e^{i\theta}$. Par factorisation par l'angle moitié :*

$$\tfrac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}\right)} = i\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = i\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2} \in i\mathbb{R}.$$

— *si A est le point du plan complexe d'affixe z, B celui d'affixe 1 et C celui d'affixe -1, ABC est un triangle inscrit dans le cercle unité et BC est un diamètre de ce cercle. Par application du théorème de la médiane, ABC est donc rectangle en A et $\arg\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$. On en déduit que $\frac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.*

Références