Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

2 janvier 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *admettant une limite finie* l *lorsque* $x \to +\infty$. *Montrez que*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists A > 0 : \forall (x, x') \in [A, +\infty[,\ |f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon$$

Solution : *Soit* $\varepsilon > 0$. *Posons* $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/2 > 0$. *En utilisant la définition de* $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$, *on peut affirmer qu'il existe* $A > 0$ *tel que :* $\forall x \geqslant A$, $|f(x) - l| \leqslant \tilde{\varepsilon}$. *Soit alors* $(x, x') \in [A, +\infty[$, *majorons en utilisant l'inégalité triangulaire :*

$$|f(x) - f(x')| = |[f(x) - l] + [l - f(x')]| \leqslant |f(x) - l| + |f(x') - l| \leqslant 2\tilde{\varepsilon} \leqslant \varepsilon$$

ce qui prouve le résultat.

Références