Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

3 juin 2023

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

En utilisant la définition de la notion de limite en un point, montrer que :

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$
2. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
3. $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$
4. $\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution :

1. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche* $m \in \mathbb{R}$ *tel que si* $x \in]m,+\infty[$ *alors on a :* $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| = \dfrac{1}{|x|} < \varepsilon$. *Cette inéquation est équivalente à* $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. *En posant* $m = \dfrac{1}{\varepsilon}$, *on a bien pour tout* $x \in]m,+\infty[$: $\left|\dfrac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$. *Voilà qui prouve que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.
2. *Soit* $M \in \mathbb{R}$. *On peut supposer que* $M \geqslant 1$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+^*$, *si* $|x-0| = |x| = x < \eta$ *alors* $\dfrac{1}{x} > M$. *Cette inéquation est équivalente à* $\dfrac{1}{M} > x$. *Il suffit alors de poser* $\eta = \dfrac{1}{M}$. *On montre ainsi que* $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
3. *Soit* $M \in \mathbb{R}_+^*$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ *tel que pour tout* $x > 0$, *si* $1 - x < \eta$ *alors* $\dfrac{1}{1-x^2} > M$. *On a :*
$$\frac{1}{1-x^2} > M \Longleftrightarrow x \geqslant \sqrt{1 - \frac{1}{M}} \Longleftrightarrow 1 - x \leqslant 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M}}.$$
Avec $\eta = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M}}$, *on répond au problème posé. Ainsi* $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1}{1-x^2} = +\infty$.
4. *Soit* $\varepsilon > 0$. *On cherche* $\eta \in \mathbb{R}$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *si* $|x-a| < \eta$ *alors* $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}_+$, *tel que* $x > a$ *on a :*
$$\sqrt{x} - \sqrt{a} < \varepsilon \Longleftrightarrow x < \left(\varepsilon + \sqrt{a}\right)^2 \Longleftrightarrow x - a < \left(\varepsilon + \sqrt{a}\right)^2 - a = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a}.$$

Si $x < a$*, on montre que :*

$$\sqrt{a} - \sqrt{x} < \varepsilon \Longleftrightarrow a - x < 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2.$$

Par suite, avec $\eta = \min\left\{2\varepsilon\sqrt{a} + \varepsilon^2, 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2\right\}$ *(il faut au départ avoir choisi* ε *suffisamment petit pour que* $\sqrt{a} - \varepsilon > 0$*), on répond au problème posé et on a bien :* $\lim\limits_{x \to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ *avec* $a \in \mathbb{R}_+$*.*

Références