

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

25 janvier 2022

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

En utilisant la définition de la notion de limite en un point, montrer que :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Solution :

- Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $m \in \mathbb{R}$ tel que si $x \in]m, +\infty[$ alors on a : $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$. Cette inéquation est équivalente à $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$. En posant $m = \frac{1}{\varepsilon}$, on a bien pour tout $x \in]m, +\infty[$: $\left| \frac{1}{x} - 0 \right| < \varepsilon$. Voilà qui prouve que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.
- Soit $M \in \mathbb{R}$. On peut supposer que $M \geq 1$. On cherche $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, si $|x - 0| = |x| = x < \eta$ alors $\frac{1}{x} > M$. Cette inéquation est équivalente à $\frac{1}{M} > x$. Il suffit alors de poser $\eta = \frac{1}{M}$. On montre ainsi que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.
- Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. On cherche $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x > 0$, si $1 - x < \eta$ alors $\frac{1}{1-x^2} > M$.
On a :

$$\frac{1}{1-x^2} > M \iff x \geq \sqrt{1 - \frac{1}{M}} \iff 1 - x \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M}}.$$

Avec $\eta = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M}}$, on répond au problème posé. Ainsi $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x^2} = +\infty$.

- Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, si $|x - a| < \eta$ alors $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, tel que $x > a$ on a :

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} < \varepsilon \iff x < (\varepsilon + \sqrt{a})^2 \iff x - a < (\varepsilon + \sqrt{a})^2 - a = \varepsilon^2 + 2\varepsilon\sqrt{a}.$$

Si $x < a$, on montre que :

$$\sqrt{a} - \sqrt{x} < \varepsilon \iff a - x < 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2.$$

Par suite, avec $\eta = \min \{2\varepsilon\sqrt{a} + \varepsilon^2, 2\varepsilon\sqrt{a} - \varepsilon^2\}$ (il faut au départ avoir choisi ε suffisamment petit pour que $\sqrt{a} - \varepsilon > 0$), on répond au problème posé et on a bien : $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+$.

Références