Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 juin 2022

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Pour $n \geqslant 1$, on considère l'équation

$$(x-n)\ln n = x\ln(x-n).$$

1. *Montrer que pour n assez grand, cette équation admet une unique racine $x_n \in]n+1, n+2[$.*
2. *Montrer que $(x_n - n - 1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n}$.*

Solution :

1. *On pose $y = x-n-1 \in [0,1]$. On considère donc l'équation $(y+1)\ln n = (y+n+1)\ln(y+1)$, soit $(y+1)\ln(y+1) - (y+1)\ln n + n\ln(y+1) - n\ln n + n\ln n = 0$ ou encore $(y+1+n)\ln\frac{y+1}{n} + n\ln n = 0$.*
   Soit $F(y) = (y+1+n)\ln\frac{y+1}{n} + n\ln n$. On a $F(0) = (1+n)\ln\frac{1}{n} + n\ln n = -\ln n \leqslant 0$. On a $F(1) = (2+n)\ln\frac{2}{n} + n\ln n = 2\ln 2 - 2\ln n + n\ln 2 = \ln\dfrac{2^{n+2}}{n^2}$.
   Soit $u_n = \dfrac{2^{n+2}}{n^2}$. On a $u_1 = 8; u_2 = 4; u_3 = \dfrac{32}{9}$. Comme $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \geqslant 1$ pour $n \geqslant 3$. Donc la suite u_n est croissante, et par suite, $\forall n \geqslant 1$, $u_n \geqslant 0$. Ainsi $F(1) \geqslant 0$. Comme F est continue sur $[0,1]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, F s'annule au moins une fois sur $[0,1]$.
   De plus, $F'(y) = \ln\frac{y+1}{n} + \dfrac{y+1+n}{y+1} = \ln\frac{y+1}{n} + 1 + \dfrac{n}{y+1}$. Soit $z = \frac{y+1}{n} \in \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \subset]0,2]$. On a $F'(y) = \ln z + 1 + \frac{1}{z} = G(z)$. On a $G'(z) = \dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{z^2} = \dfrac{z-1}{z^2}$. La fonction G admet donc un minimum en 1, et comme $G(1) = 2$, on en déduit que $G(z)$, comme $F'(y)$ est strictement positif. On en déduit que F est strictement croissante sur $[0,1]$, ce qui assure l'unicité de $y_n = x_n - n - 1$ et donc celle de x_n.
2. *À partir de $(y_n+1+n)\ln(y_n+1) = (1+y_n)\ln n$, on a $\ln(y_n+1) = \dfrac{1+y_n}{y_n+1+n}\ln n \sim (1+y_n)\dfrac{\ln n}{n}$ puisque la suite (y_n) est bornée. Toujours parce que (y_n) est bornée, on a*

$\lim_{n\to\infty} \ln(y_n+1) = 0$. *Donc* $\lim_{n\to\infty} y_n = 0$. *Donc* $\ln(y_n+1) \sim y_n$ *d'une part et* $(1+y_n)\frac{\ln n}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$ *d'autre part, on en conclut que* $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$ *ce qu'il fallait démontrer.*

Références