

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

19 avril 2024

Exercice 0.1 ★★★ Pas de titre

1. Montrer que l'équation

$$x^n + x - 1 = 0$$

possède une unique solution $u_n \in [0, 1]$.

2. Montrer que la suite (u_n) converge vers 1.

3. En posant $y_n = 1 - u_n$, montrer que $n \ln(1 - y_n) = \ln y_n$, et que

$$\frac{\ln n}{2n} \leq y_n \leq \frac{2 \ln n}{n}.$$

4. En déduire un équivalent de la suite (y_n) .

Solution : On va se servir de trois inégalités :

$$\forall u \in [0, 1], -u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1 - u) \leq -u \quad \forall t \in]0, +\infty[, \frac{\ln t}{t} \leq \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad \forall t \in]1, +\infty[, \frac{\ln^2 t}{t} \leq \frac{4}{e^2}.$$

La deuxième inégalité se démontre en étudiant les variations de $t \mapsto \frac{\ln t}{t}$ qui obtient son maximum en $t = e$ et la troisième se démontre de même en étudiant les variations de $t \mapsto \frac{\ln^2 t}{t}$ (sur $]1, +\infty[$) qui obtient son maximum en $t = e^2$.

1. Soit $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour $0 \leq x \leq 1$. On a $f'_n(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$, $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$. De ce fait l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution (sur $[0, 1]$.)
2. On a $f_{n+1}(u_n) = u_n u_n^n + u_n - 1$. Comme $u_n \in [0, 1]$, on a $f_{n+1}(u_n) < u_n^n + u_n - 1 = 0 = f_{n+1}(u_{n+1})$. D'après la croissance stricte de f_n sur $[0, 1]$, on en déduit que $u_n < u_{n+1}$. La suite (u_n) est donc strictement croissante et majorée, elle converge donc vers $\ell \in [0, 1]$. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < \ell$ et donc $f_n(u_n) = 0 < \ell^n + \ell - 1$. Si on suppose, $\ell < 1$, en passant à la limite on aurait $0 \leq \ell - 1$. Impossible. Donc $\ell = 1$.

3. À partir de $u_n^n = 1 - u_n$ on obtient $(1 - y_n)^n = y_n$ et comme $1 - y_n$ est positif, $n \ln(1 - y_n) = \ln y_n$. Soit $f(x) = \frac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ pour $0 < x < 1$. On a $f'(x) = \frac{-\frac{1}{1-x} \ln x - \frac{1}{x} \ln(1-x)}{\ln^2 x} > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]0, 1[$.

On prend $n \geq 1$. En partant de $\ln(1 - u) \leq -u$ pour $0 \leq u < 1$ on obtient, en prenant $u = \frac{2 \ln n}{n} < \frac{2}{e} < 1$, $\ln(1 - \frac{2 \ln n}{n}) \leq -\frac{2 \ln n}{n}$ donc puisque $\ln(\frac{2 \ln n}{n}) < 0$,

$$f\left(\frac{2 \ln n}{n}\right) \geq -\frac{\frac{2 \ln n}{n}}{\ln \ln n + \ln 2 - \ln(n)} \geq \frac{2}{n} \frac{1}{1 - \frac{\ln(2 \ln n)}{\ln n}} \geq \frac{2}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

Comme on a $f(y_n) = \frac{1}{n}$, la croissance de f assure que $\frac{2 \ln n}{n} \geq y_n$.

On prend $n \geq 2$. En partant de $-u - \frac{u^2}{2} \leq \ln(1 - u)$ pour $0 \leq u < 1$ on obtient, en prenant

$u = \frac{\ln n}{2n} < \frac{1}{2e} < 1$, $\ln(1 - \frac{\ln n}{2n}) \geq -\frac{\ln n}{2n} - \frac{\ln^2 n}{8n^2}$ donc puisque $\ln(\frac{\ln n}{2n}) < 0$,

$$f\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leq -\frac{\frac{\ln n}{2n} + \frac{\ln^2 n}{8n^2}}{\ln \ln n - \ln 2 - \ln(n)} \leq \frac{1}{2n} \frac{1 + \frac{\ln^2 n}{4n}}{1 + \frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln \ln n}{\ln n}}.$$

Au numérateur, on majore $\frac{\ln^2 n}{n}$ par $\frac{4}{e^2}$ et au dénominateur on minore $\frac{\ln 2}{\ln n} - \frac{\ln \ln n}{\ln n}$ par $0 - \frac{1}{e}$.

Ainsi $f\left(\frac{\ln n}{2n}\right) \leq \frac{1}{n} \frac{1 + \frac{1}{e^2}}{2(1 - \frac{1}{e})} \leq \frac{1}{n} = f(y_n)$.

On en déduit, toujours grâce à la croissance de f , que $\frac{\ln n}{2n} \leq y_n$ et ce pour $n \geq 2$.

4. On va remplacer les facteurs $\frac{1}{2}$ et 2 de la question précédente par $1 - \varepsilon$ et $1 + \varepsilon$. On n'obtiendra plus des inégalités globales, mais des inégalités à partir d'un certain rang.

Soit $\varepsilon > 0$ et soit $n \geq 2$. On a $\ln\left(1 - \frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}\right) \leq -\frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}$ donc

$$f\left(\frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}\right) \geq -\frac{\frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n}}{\ln \ln n + \ln(1+\varepsilon) - \ln(n)} \geq \frac{1+\varepsilon}{n} \frac{1}{1 - \frac{\ln((1+\varepsilon) \ln n)}{\ln n}} \geq \frac{(1+\varepsilon)}{n} \geq \frac{1}{n}.$$

On en déduit que $\frac{(1+\varepsilon) \ln n}{n} \geq y_n$.

Dans l'autre sens, $\ln\left(1 - \frac{(1-\varepsilon) \ln n}{n}\right) \geq -\frac{(1-\varepsilon) \ln n}{n} - \frac{(1-\varepsilon)^2 \ln^2 n}{2n^2}$ donc

$$f\left(\frac{(1-\varepsilon) \ln n}{n}\right) \leq -\frac{\frac{(1-\varepsilon) \ln n}{n} + \frac{(1-\varepsilon)^2 \ln^2 n}{2n^2}}{\ln \ln n - \ln(1-\varepsilon) - \ln(n)} \leq \frac{(1-\varepsilon)}{n} \frac{1 + (1-\varepsilon) \frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln \ln n}{\ln n}}.$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-\varepsilon) \frac{1 + (1-\varepsilon) \frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln \ln n}{\ln n}} = 1 - \varepsilon$, donc à partir d'un certain rang N_ε , on a $(1 -$

$\varepsilon) \frac{1 + (1-\varepsilon) \frac{\ln n}{2n}}{1 - \frac{\ln(1-\varepsilon)}{\ln n} - \frac{\ln \ln n}{\ln n}} = 1 - \varepsilon \leq 1$.

On en déduit que pour $n \geq N_\varepsilon$, $\frac{(1-\varepsilon)\ln n}{n} \leq y_n$.

En résumé pour $n \geq N_\varepsilon$, $1-\varepsilon \leq y_n \frac{n}{\ln n} \leq 1+\varepsilon$. On a bien démontré que $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \frac{n}{\ln n} = 1$
c'est-à-dire que $y_n \sim \frac{\ln n}{n}$.

Références