

# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

6 juin 2023

## Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère l'équation  $(E_n) : x + \ln x = n$  d'inconnue  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

1. Montrer que l'équation  $E_n$  possède une solution unique notée  $x_n$ .
2. Montrer que la suite  $(x_n)$  diverge vers  $+\infty$ .
3. Donner un équivalent simple de la suite  $(x_n)$ .

### Solution :

1. Posons  $\theta : \begin{cases} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x + \ln x \end{cases}$ . La fonction  $\theta$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et si  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $\theta'(x) = \frac{x+1}{x}$ . On en déduit que  $\theta'$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que  $\theta$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+$ . La fonction  $\theta$  réalise donc une bijection de  $\mathbb{R}_+^*$  sur  $\mathbb{R}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe donc un unique réel positif noté  $x_n$  tel que  $\theta(x_n) = n$ . Ce réel est donné par :  $x_n = \theta^{-1}(n)$ .
2. Comme  $\theta^{-1}(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ , appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction on obtient :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \theta^{-1}(n) = +\infty$ .
3. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . En partant de  $x_n + \ln x_n = n$  on obtient :  $x_n = n \frac{1}{1 + \frac{\ln x_n}{x_n}}$ . Mais comme

$x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ , on a :  $\frac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  et donc  $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n}$ .

## Références