Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'équation (E_n) : $\quad x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1. *Montrer que l'équation E_n possède une solution unique notée x_n.*
2. *Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.*
3. *Donner un équivalent simple de la suite (x_n).*

Solution :

1. *Posons $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^* \\ x & \longmapsto & x + \ln x \end{array} \right.$. La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\theta'(x) = \frac{x+1}{x}$. On en déduit que θ' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et que θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. La fonction θ réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un unique réel positif noté x_n tel que $\theta(x_n) = n$. Ce réel est donné par : $x_n = \theta^{-1}(n)$.*
2. *Comme $\theta^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction on obtient : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \theta^{-1}(n) = +\infty$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. En partant de $x_n + \ln x_n = n$ on obtient : $x_n = n \dfrac{1}{1 + \dfrac{\ln x_n}{x_n}}$. Mais comme $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on a : $\dfrac{\ln x_n}{x_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ et donc $\boxed{u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} n}$.*

Références