Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère l'équation (E_n) : $xe^x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

1. *Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (E_n) admet une et une seule solution dans $\mathbb{R}_+$. On la notera x_n.*
2. *Déterminer la limite de (x_n).*

Solution :

1. *Posons $\theta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$ .La fonction θ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et si $x \in \mathbb{R}_+$, $\theta'(x) = (x+1)\,e^x$. On en déduit que θ' est strictement positive sur $\mathbb{R}_+$ et que θ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. On peut alors affirmer que θ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un unique réel positif noté x_n tel que $\theta(x_n) = n$. Ce réel est donné par : $x_n = \theta^{-1}(n)$.*
2. *Comme $\theta^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, en appliquant le théorème de composition d'une suite par une fonction on obtient : $\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} \theta^{-1}(n) = +\infty$ car $\theta(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.*

Références