Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit $a > 0$. Étudiez la suite de terme général :

$$u_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}$$

Indication 0.0 : *Aidez-vous de l'exercice précédent.*

Solution : *Introduisons la fonction* $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \longmapsto & \sqrt{a+x} \end{array} \right.$ *. La suite (u_n) est définie par récurrence par :*

$$\begin{cases} & u_0 = \sqrt{a} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}.$$

Comme f est strictement croissante et que $u_1 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = u_0$, la suite (u_n) est strictement croissante. Un point fixe positif de f est une solution positive de $x^2 - x - a = 0$. La seule possibilité est $\alpha = \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$. On en déduit que l'intervalle $[0, \alpha]$ est stable pour f. De plus $u_0 = \sqrt{a} \in [0, \alpha]$. Par conséquent $(u_n \in [0, \alpha])$ et la suite est majorée. On applique le théorème de la limite monotone et on en déduit qu'elle converge vers l'unique point fixe positif de f. Il vient alors que : $\boxed{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}} n{+}\infty \dfrac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}}$

Références