Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ **Pas de titre**

Étudiez la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

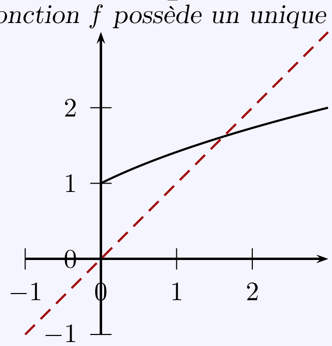
$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Solution : *On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc que la suite (u_n) est bien définie.*

Introduisons la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x+1} \end{array} \right.$. Cette fonction est croissante comme composée de fonctions croissantes. Étudions la position de son graphe par rapport à la bissectrice principale. Pour ce faire, considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$, et cherchons son signe. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$g(x) = \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{1+x} + x} = -\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{1+x} + x}$$

Notons $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. La fonction g est positive sur $[0, \alpha]$, négative sur $[\alpha, +\infty[$. En particulier, la fonction f possède un unique point fixe $\alpha \in [0, +\infty[$.



Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, si $u_n \leqslant \alpha$, $u_{n+1} \geqslant u_n$ et si $u_n \geqslant \alpha$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

On vérifie en utilisant les variations de f que les intervalles $[0, \alpha]$ et $[\alpha, +\infty[$ sont stables. On étudie alors deux cas :

1. *Si* $u_0 \in]0, \alpha]$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, \alpha]$ *et la suite* (u_n) *est croissante et majorée par* α. *Elle converge alors vers l'unique point fixe de* f, α.
2. *Si* $u_0 \in [\alpha, +\infty[$, *alors pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\alpha, +\infty[$ *et la suite* (u_n) *est décroissante et minorée par* α. *Elle converge donc vers l'unique point fixe de* f, α.

On a donc montré que $\forall u_0 > 0$, $\boxed{u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

Références