

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 Pas de titre

Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^n u_k}$$

1. Trouver une relation de récurrence simple entre deux termes successifs u_{n+1} et u_n de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante
3. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Solution :

1. Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Introduisons alors $f : \begin{cases} [-1, +\infty] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \sqrt{x^2 + x} \end{cases}$. On a affaire à une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On vérifie par récurrence que si $u_0 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ ce qui permet de définir u_{n+1} . Donc la suite (u_n) est bien définie.

2. Calculons alors pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3. Par l'absurde, si la suite (u_n) convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, alors l devrait être un point fixe de f et on devrait avoir $l = f(l)$, c'est-à-dire $l = \sqrt{l^2 + l}$ et donc $l = 0$. Mais c'est impossible car $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Références