Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 juin 2023

Exercice 0.1 **Pas de titre**

Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

1. *Trouver une relation de récurrence simple entre deux termes successifs u_{n+1} et u_n de la suite.*
2. *Montrer que la suite (u_n) est croissante*
3. *Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.*

Solution :

1. *Remarquons que pour tout $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Introduisons alors $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [-1, +\infty] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+x} \end{array} \right.$. On a affaire à une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On vérifie par récurrence que si $u_0 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ce qui permet de définir u_{n+1}. Donc la suite (u_n) est bien définie.

2. *Calculons alors pour $n \in \mathbb{N}$*

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \geqslant 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.

3. *Par l'absurde, si la suite (u_n) convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, alors l devrait être un point fixe de f et on devrait avoir $l = f(l)$, c'est-à-dire $l = \sqrt{l^2 + l}$ et donc $l = 0$. Mais c'est impossible car $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante.*
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Références