# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 décembre 2021

**Exercice 0.1** ★★ **Pas de titre**

*Soient $0 < u_0 < v_0$, et $p > q > 0$. On définit deux suites par :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{pu_n + qv_n}{p+q} \quad v_{n+1} = \frac{pv_n + qu_n}{p+q}$$

1. *Montrez que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers la même limite.*
2. *Soit $\varepsilon > 0$. Pour quelles valeurs de $n$ est-on sûr que $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$ ?*

**Solution :**

1. *Par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant v_n$, car*

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{p-q}{p+q}(v_n - u_n)$$

*Soit alors $n \in \mathbb{N}$,*

$$u_{n+1} - u_n = \frac{q}{p+q}(v_n - u_n) \geqslant 0$$
$$v_{n+1} - v_n = \frac{q}{p+q}(u_n - v_n) \leqslant 0$$

*Donc $(u_n)$ est croissante et $(v_n)$ décroissante. En notant $d_n = v_n - u_n$, on a vu que*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+1} = kd_n$$

*où $k = \dfrac{p-q}{p+q}$ et donc on a $0 < k < 1$. Par conséquent, comme $(d_n)$ est géométrique $d_n = k^n d_0 \to 0$. En conclusion, les deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes et convergent vers la même limite.*

2. *Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant l \leqslant v_n$, il vient $|u_n - l| \leqslant v_n - u_n = d_n = k^n(v_0 - u_0)$. Pour avoir $|u_n - l| \leqslant \varepsilon$, il suffit que $d_n \leqslant \varepsilon$. C'est-à-dire*

$$n \geqslant \frac{\ln \dfrac{\varepsilon}{v_0 - u_0)}}{\ln k}.$$

## Références